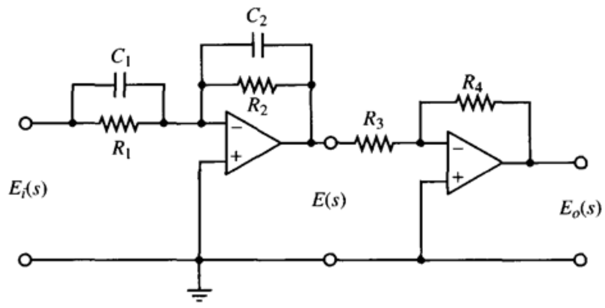
Compensación en atraso

Compensador electrónico en atraso con amplificadores operacionales



$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}\,\frac{R_1 C_1 + 1}{R_2 C_2 + 1} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}\,\frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} = K_c \beta\,\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c\,\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

$$T = R_1 C_1, \qquad \beta T = R_2 C_2, \qquad \beta = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} > 1$$

$$K_c \beta = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}, \qquad K_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}$$

Esta red tiene una ganancia en cd de $K_c \beta$
Es una red de atraso si $R_2 C_2 > R_1 C_1$.

Técnicas de compensación de atraso

Para compensar en atraso el sistema debe de tener características satisfactorias de la respuesta transitoria pero no en estado estable.

En este caso la compensación consiste, esencialmente, en incrementar la ganancia en lazo cerrado sin modificar en forma notable las características de la respuesta transitoria.
Para evitar un cambio notable en el lugar geométrico de las raíces, la contribución de ángulo de la red de atraso debe limitarse a una cantidad pequeña, menor a 5°. Para asegurar esto, colocamos el polo y el cero de la red de atraso relativamente cerca uno del otro y cerca del origen del plano s. De este modo, los polos en lazo cerrado del sistema compensado sólo se alejarán ligeramente de sus ubicaciones originales y su característica de la respuesta transitoria cambiará muy poco.

Procedimiento de diseño de atraso

1. Con base en las especificaciones de la respuesta transitoria, determine los polos dominantes en lazo cerrado deseados. Estos polos deben de estar sobre el lugar de las raíces.

2. Determine la ganancia necesaria para estar ubicados en los polos dominantes de lazo cerrado.

3. Calcule la constante estática de error utilizando la ganancia obtenida

4. Determine el incremento necesario en la constante estática de error para satisfacer las especificaciones, ésta es la ganancia que deberá aportar el compensador en atraso (β).

5. Determine el polo y el cero del compensador de atraso que producen el incremento necesario en la constante estática de error, sin alterar apreciablemente el lugar geométrico de las raíces original.
   El cero del compensador se ubica a la décima parte de la parte real del punto deseado.
   Determine el polo con la (β).
   Calcule el ángulo de atraso que aporta el compensador, esta debe ser menor a 5°.

6. Trace el lugar geométrico de las raíces del sistema compensado y localice los polos dominantes en lazo cerrado deseados sobre el lugar geométrico de las raíces. (Si la contribución de ángulo de la red de atraso es muy pequeña, menor a 5°, el lugar geométrico de las raíces original y el nuevo serán casi idénticos.)

7. Ajuste la ganancia K_c del compensador a partir de la condición de magnitud, a fin de que los polos dominantes en lazo cerrado se encuentren en la ubicación deseada.

Ejemplo 1

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Se desea que el sistema tenga un coeficiente estático de error de velocidad $K_v = 10seg^{-1}$ sin modificar su característica transitoria.

Sistema original

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{4}{s(s+2)} = 2\ seg^{-1}$$

Ecuación característica

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{4}{s(s+2)} = s^2 + 2s + 4 = 0 \qquad s_{1,2} = -1 \pm j1.732$$

donde
$\zeta\omega_n = 1$ y $\omega_d = 1.732$ entonces $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2$ estas son las características transitorias originales, estas especificaciones no deben de modificarse, por lo que este sería el punto deseado s_d, pero se necesita aumentar el coeficiente estático de error de 2 a 10, la ganancia debe de aumentar en un factor de.

$$\frac{10}{2} = 5$$

Se necesita un compensador en atraso que proporcione una ganancia de 5

$$\beta = 5$$

Se ubica al cero del compensador en atraso a una décima parte de la parte real del punto deseado

$$-\frac{1}{T} = -0.1$$

El polo estaría en

$$-\frac{1}{\beta T} = -0.02$$

El compensador sería

$$G_c(s) = \frac{s+0.1}{s+0.02} K_c$$

El ángulo que aporta el compensador en atraso sobre el punto deseado es

$$\angle(s+0.1) - \angle(s+0.02) = 117.45° - 119.5° = -2.05°$$

El sistema compensado en atraso sería

$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{4}{s(s+2)}\right)\left(\frac{s+0.1}{s+0.02} K_c\right)$$

Con la condición de magnitud

$$K_c = \frac{|s||s+2||s+0.02|}{4|s+0.1|} = \frac{(2)(2)(1.99)}{4(1.952)} = 1.019$$

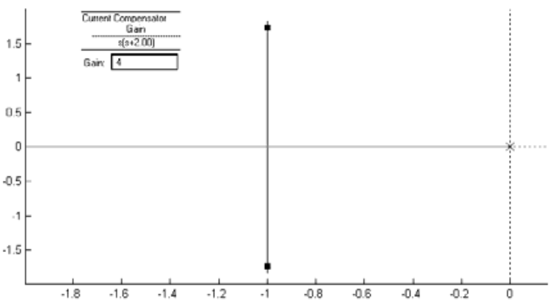
Por lo que

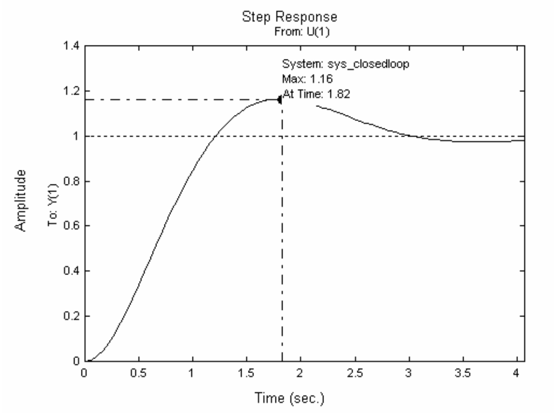
$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{4}{s(s+2)}\right)\left(\frac{s+0.1}{s+0.02}\right)(1.019)$$

El coeficiente estático de error de velocidad es

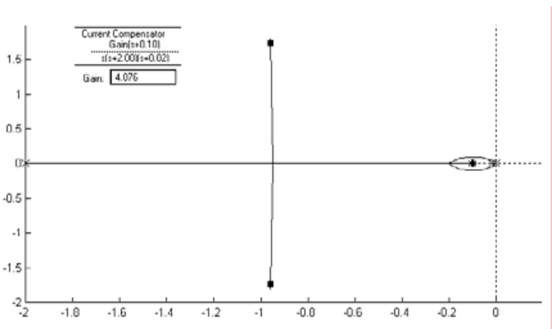
$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)G_c(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{4}{s(s+2)}\right)\left(\frac{s+0.1}{s+0.02}\right)(1.019) = 10.19\ seg^{-1}$$

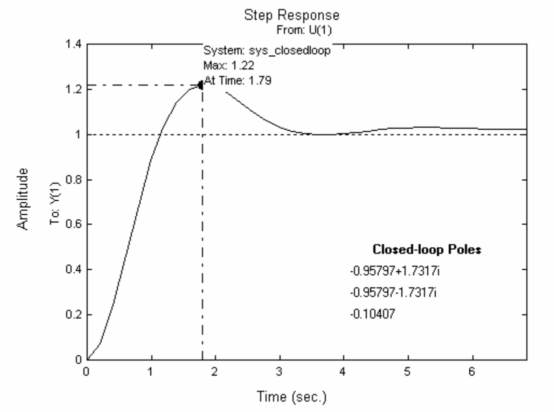
Sistema original





Sistema compensado





Ejemplo 2

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control es

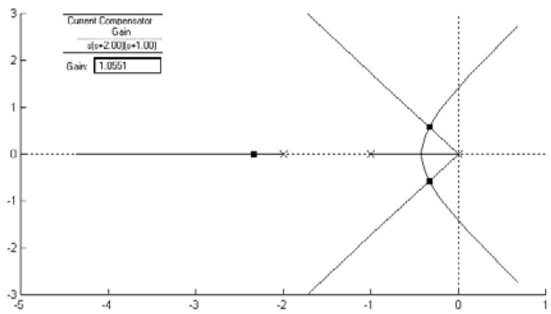
$$G(s)=\frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

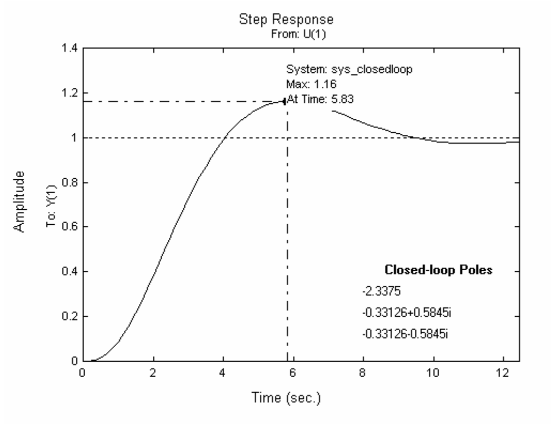
Se desea que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones, que el coeficiente estático de error de velocidad $K_v = 5\ seg^{-1}$ y la relación de amortiguamiento $\zeta = 0.5$

Sistema original

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2}{s(s+1)(s+2)} = 1\ seg^{-1}$$

Se busca el punto que este sobre el lugar de las raíces que cumpla con la relación de amortiguamiento $\zeta = 0.5$.





El punto que cumple es $s = -0.33 + j0.577$

$$-\angle(s) - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -119.77° - 40.73° - 19.06° = -179.56°$$

Entonces el punto deseado es $s_d = -0.33 + j0.577$

Por la condición de magnitud

$$K = \left.\frac{|s||s+1||s+2|}{2}\right|_{s_d} = \frac{(0.664)(0.884)(1.767)}{2} = 0.518$$

El coeficiente estático de error de velocidad para este nuevo punto es

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2*0.518}{s(s+1)(s+2)} = 0.518\ seg^{-1}$$

Entonces se necesita aumentar la ganancia en un factor de

$$\frac{5}{0.518} = 9.652$$

Se necesita un compensador en atraso que proporcione una ganancia de

$$\beta = 9.652$$

Se ubica al cero del compensador en atraso a una décima parte de la parte real del punto deseado

$$-\frac{1}{T} = -0.033$$

El polo estaría en

$$-\frac{1}{\beta T} = -0.00342$$

El compensador sería

$$G_c(s) = \frac{s + 0.033}{s + 0.00342} K_c$$

El ángulo que aporta el compensador en atraso sobre el punto deseado es de

$$\angle(s + 0.033) - \angle(s + 0.00342) = 117.24° - 119.51° = -2.27°$$

El sistema compensado en atraso sería

$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{2}{s(s+1)(s+2)}\right)\left(\frac{s + 0.033}{s + 0.00342} K_c\right)$$

Con la condición de magnitud

$$K_c = \frac{|s||s+1||s+2||s+0.00342|}{2|s+0.033|} = \frac{(0.664)(0.884)(1.767)(0.663)}{2(0.648)} = 0.53$$

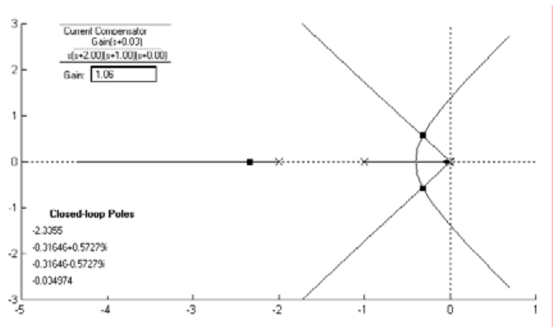
Por lo que

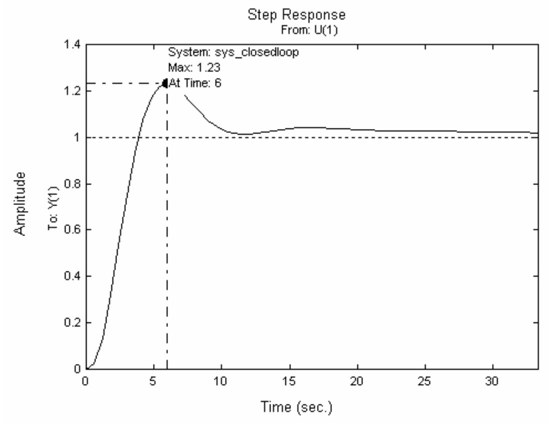
$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{2}{s(s+1)(s+2)}\right)\left(\frac{s + 0.033}{s + 0.00342}\right)(0.53)$$

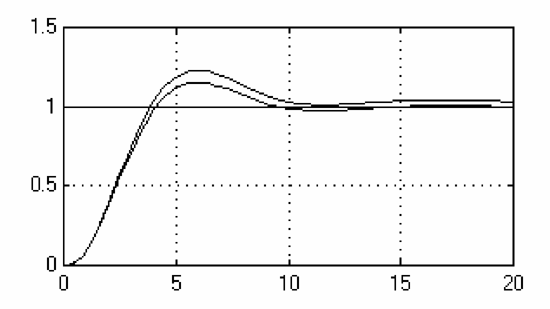
El coeficiente estático de error de velocidad es

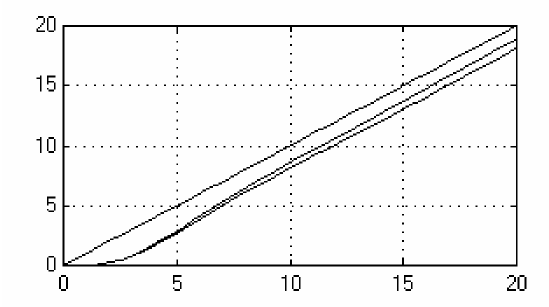
$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)G_c(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{2}{s(s+1)(s+2)}\right)\left(\frac{s + 0.033}{s + 0.00342}\right)(0.53) = 5.15\ seg^{-1}$$

Sistema compensado









Ejemplo 3 (doble compensador en atraso)

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control es

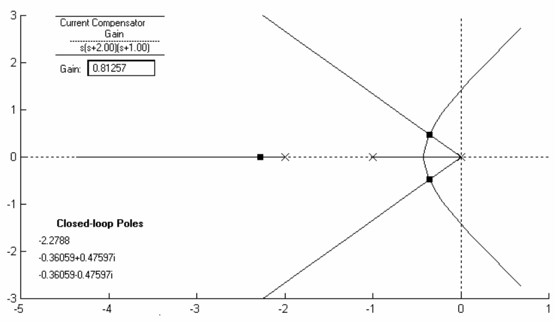
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

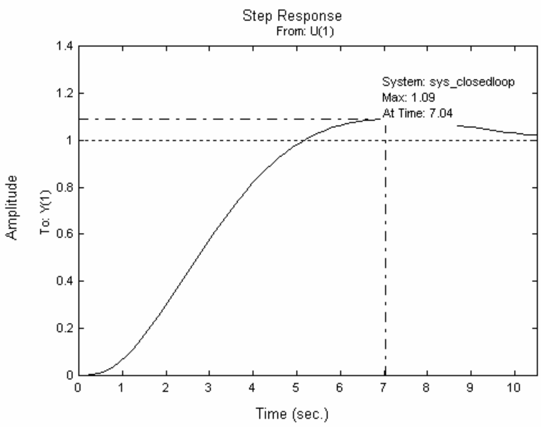
Se desea que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones, que el coeficiente estático de error de velocidad $K_v = 10\ seg^{-1}$ y la relación de amortiguamiento $\zeta = 0.6$

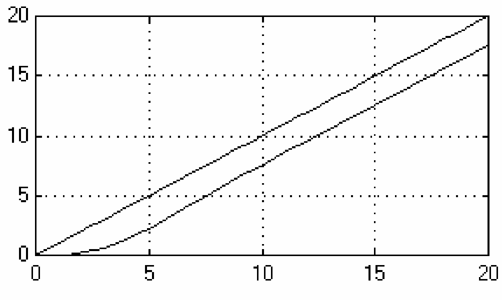
Sistema original

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0.5\ seg^{-1}$$

Se busca el punto que este sobre el lugar de las raíces que cumpla con la relación de amortiguamiento $\zeta = 0.6$.







El punto que cumple es $s = -0.36 + j0.48$

$$-\angle(s) - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -126.87° - 36.87° - 16.31° = -180.05°$$

Entonces el punto deseado es $s_d = -0.36 + j0.48$

Por la condición de magnitud

$$K = |s||s+1||s+2|\Big|_{s_d} = (0.6)(0.8)(1.709) = 0.82$$

El coeficiente estático de error de velocidad para este nuevo punto es

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{0.82}{s(s+1)(s+2)} = 0.41\,seg^{-1}$$

Entonces se necesita aumentar la ganancia en un factor de

$$\frac{10}{0.41} = 24.39$$

Se necesita un compensador en atraso que proporcione una ganancia de 24.39, un compensador no puede proporcionar esta ganancia, se utilizaran dos compensadores iguales, cada uno aportando

$$\beta = \sqrt{24.39} = 4.94$$

Se ubica al cero del compensador en atraso a una décima parte de la parte real del punto deseado

$$-\frac{1}{T} = -0.036$$

El polo estaría en

$$-\frac{1}{\beta T} = -0.0073$$

El compensador sería

$$G_c(s) = \left(\frac{s+0.036}{s+0.0073}\right)^2 K_c$$

El ángulo que aporta el compensador en atraso sobre el punto deseado es

$$2[\angle(s+0.036) - \angle(s+0.0073)] = 2(124.02° - 126.31°) = -4.58°$$

El sistema compensado en atraso sería

$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right)\left(\frac{s+0.036}{s+0.0073}\right)^2 K_c$$

Con la condición de magnitud

$$K_c = \frac{|s||s+1||s+2||s+0.0073|^2}{|s+0.036|^2} = \frac{(0.6)(0.8)(1.709)(0.596)^2}{(0.579)^2} = 0.869$$

Por lo que

$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right)\left(\frac{s+0.036}{s+0.0073}\right)^2 (0.869)$$

El coeficiente estático de error de velocidad es

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)G_c(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right)\left(\frac{s+0.036}{s+0.0073}\right)^2 (0.869) = 10.56\ seg^{-1}$$

Sistema compensado